Αλγεβρικές Δομές Ι (2018-2019)
Φροντιστηριακές ασκήσεις #1

1. Θεωρούμε το σύνολο $S = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ των μη μηδενικών πραγματικών αριθμών. Ορίζουμε την πράξη $* : S \times S \to S$ στο S ως εξής
$$a * b = |a|b.$$
   (α΄) Να δειχθεί ότι η πράξη $*$ είναι καλά ορισμένη και προσεταιριστική.
   (β΄) Να δειχθεί ότι υπάρχει $e \in S$ ώστε $e * b = b$ για κάθε $b \in S$. Επίσης να δειχθεί ότι αν $a \in S$ τότε υπάρχει $b \in S$ με $a * b = e$.
   (γ΄) Έχει η S ουδέτερο στοιχείο; Είναι η S ομάδα;

2. Να δειχθεί ότι το ανοικτό διάστημα $(-1, 1) \subset \mathbb{R}$ αποτελεί αβελιανή ομάδα με πράξη
$$x * y = \frac{x + y}{1 + xy}$$

3. Έστω $(G, *)$ μια ομάδα με ουδέτερο στοιχείο e. Αν το σύνολο G είναι πεπερασμένο με άρτιο πλήθος στοιχείων να δειχθεί ότι υπάρχει στοιχείο $a \in G$ με $a \neq e$ τέτοιο ώστε $a * a = e$.

4. Έστω $(G, *)$ μια ομάδα με ουδέτερο στοιχείο e. Αν ισχύει
$$x * x = e$$
για κάθε $x \in G$ δείξτε ότι η ομάδα G είναι αβελιανή.

5. Έστω $(G, *)$ μια ομάδα με ουδέτερο στοιχείο e και $a, b, c \in G$. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα
   (α΄) $a * b * c = e$
   (β΄) $b * c * a = e$
   (γ΄) $c * a * b = e$

6. Έστω $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Στο σύνολο $\mathbb{C}$ ορίζουμε δύο πράξεις $+, \cdot$ ως εξής:
$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$
$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1).$$
   (α΄) Δείξτε ότι τα ζεύγη $(\mathbb{C}, +)$ και $(\mathbb{C} \setminus \{(0,0)\}, \cdot)$ είναι αβελιανές ομάδες, και ότι η πράξη $\cdot$ είναι επιμεριστική επί της πράξης $+$.
   (β΄) Θέτουμε $i = (0, 1) \in \mathbb{C}$ και αν $a \in \mathbb{R}$ θέτουμε $\widetilde{a} = (a, 0) \in \mathbb{C}$. Δείξτε ότι αν $z \in \mathbb{C}$ τότε υπάρχουν μοναδικά $a, b \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $z = \widetilde{a} + \widetilde{b} \cdot i$. Επιπλέον δείξτε ότι $i \cdot i = \widetilde{(-1)}$.